Propozycje tematów zagadnień na seminarium
„Klasyczne struktury algebraiczne i ich zastosowania”

1 O jednoczesnym sprowadzaniu do postaci trójkątnej

Jednym z klasycznych wyników algebry liniowej jest twierdzenie mówiące, że dla przemiennej rodziny endomorfizmów przestrzeni liniowej V istnieje pewna baza V, w której wszystkie te endomorfizmy mają macierz górnotrójkątną. Nie jest to jednak warunek konieczny, patrz [1]. Ta klasyczna tematyka opisana jest szerzej w książce [2], a także np. w pracy [3], W ostatnich latach pojawiły się natomiast prace dotyczące podobnej tematyki w przypadku nieskończenie wymiarowych przestrzeni, patrz [4] wraz z pozycjami bibliograficznymi.

1 A. Męcel, *Rozkłady Jordana-Chevalleya. Wspólna diagonalizowalność i triangularyzowalność, wykład z GAL II**, Warszawa 2021.

2 H. Radjavi, P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer, 2014

3 K. Gedeon, *Simultaneous Triangularization of Certain Sets of Matrices*, Univeristy of California, San Diego 2012.

4 Z. Mesyan, *Infinite-dimensional triangularizable algebras*, Forum Mathematicum 31 (2018).

2 O niezależności warunków w definicji odwzorowań liniowych

Definicja przekształcenia liniowego składa się z warunku addytywności oraz warunku jednorodności. W kontekście przestrzeni liniowych nad ciałem żaden warunek nie implikuje drugiego bez dodatkowych zastrzeżeń, patrz [2], [3]. W ogólniejszym kontekście teorii modułów oznacza to, że jeśli $End_R(V)$ jest zbiorem endomorfizmów (lewostronnego) R-modułu V, zaś $M_R(V)$ – zbiorem jednorodnych funkcji na V, wówczas $End_R(V) \subseteq M_R(V)$. Różne klasyczne prace dotyczą warunku równości w tej inkluzji, np. [1], [2]. Zagadnienie to można też rozpatrywać z punktu widzenia teorii równań funkcyjnych, patrz [3], [4].

1 W. S. Martindale III, *When are multiplicative mappings additive?* Proc. Amer. Math. Soc., 21, 695–698 (1969)

2 C. J. Maxsonm J. H. Meyer, *How Many Subspaces Force Linearity?*, The American Mathematical Monthly 108 (2001)

3 A. Naziev, *On the independence of conditions in the linear mapping definition*, `https://arxiv.org/abs/2208.12648`.

4 M. Bresar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale III, *Functional Identities*, Birkhauser Verlag, 2007.

3 Klasyczne konstrukcje pierścieni z dzieleniem

Pierścienie z dzieleniem, zwane długo ciałami nieprzemiennymi, to pierścienie z jedynką, w których każdy niezerowy element ma element odwrotny. Macierze nad pierścieniami z dzieleniem (będące pierścieniami prostymi) grają centralną rolę w strukturalnej teorii wielu klas pierścieni [1], [2]. Zanim wgłębimy się w dowody wielu ciekawych rezultatów strukturalnych (począwszy od twierdzenia Wedderburna z 1905 roku mówiącego, że skończony pierścień z dzieleniem jest ciałem), warto zapoznać się z klasycznymi konstrukcjami pierścieni z dzieleniem. Dzielą się one na dwie zasadnicze klasy w zależności od skończoności wymiaru pierścienia jako przestrzeni liniowej nad swoim centrum. Przykłady te, chodzące od Hilberta, Dicksona, Malceva czy Neumanna zaprezentowane są w czternastym rozdziale [2] oraz w początkowych rozdziałach [3]. Wraz z rozwojem teorii tzw. centralnych algebr prostych, obok klasycznych przykładów pojawiły się też ogólne konstrukcje i problemy otwarte, badane np. przez Amitsura. Przystępny przegląd tych zagadnień znaleźć można w [4].

1 R. Andruszkiewicz, Wstęp do teorii pierścieni nieprzemiennych, Białystok 2019.

2 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001.

3 P. M. Cohn, *Skew fields: theory of general division rings*, CUP 1995.

4 M.R.M. Ashburner, *A Survey of the Classification of Division Algebras over Fields*, University of Waterloo 2008.

4 Pierwiastki wielomianów nad pierścieniami nieprzemiennymi

Gdy K jest ciałem (ogólniej: dziedziną całkowitości), liczba pierwiastków wielomianu $f \in K[x]$ ograniczona jest przez stopień f. Nie jest to prawdą nawet, gdy zastąpimy K pierścieniem przemiennym, np. $x(x-1) = (x-3)(x-4) \in \mathbb{Z}_6[x]$, co prowadzi choćby do klasycznych zagadnień teorioliczbowych [1]. W kontekście pierścieni nieprzemiennych pojawia się już problem definicji pierwiastka. Zagadnienia te badane są w ogólnym kontekście już od lat 30' XX wieku [2]. Szczególnie czytelne, klasyczne rezultaty uzyskane są dla wielomianów o współczynnikach w pierścieniach z dzieleniem [3]. Wyjaśniają one choćby jak patrzeć na problem szukania kwaternionów spełniających równanie $x^2 + 1 = 0$ (jest ich nieskończenie wiele, ale z dokładnością do sprzężenia – są tylko dwa). Pewne rezultaty uzyskać można także w ogólnym kontekście rozszerzeń Orego i pierścieni skośnych wielomianów [4].

1 A. Klivans, *Factoring Polynomials Modulo Composites*, Carnegie-Mellon Univ, Pittsburgh PA, Dept of CS, 1997.

2 O. Ore, *Theory of Non-Commutative Polynomials*, The Annals of Mathematics 34 (1933), 480-508.

3 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001, §16.

4 A. Leroy, *Introduction to Noncommutative Polynomial Maps*, 2011.

5a **Elementy nilpotentne w pierścieniach łącznych**

Element r pierścienia R nazywamy nilpotentnym, gdy $r^n = 0$, dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_+$. W pierścieniu przemiennym R zbiór elementów nilpotetnych tworzy ideał, zwany nilradykałem, będący jednocześnie przecięciem wszystkich ideałów pierwszych. W przypadku pierścieni nieprzemiennych sytuacja komplikuje się już na poziomie pierścienia macierzy nad ciałem, co prowadzi w ogólności choćby do wprowadzenia podstawowego rozróżnienia pomiędzy nil-ideałami i ideałami nilpotentnymi, a także do wyróżnienia szeregu tzw. radykałów pierścieni i badania głębokich związków między nimi [1]. Już w latach 60-tych badania nil-ideałów miało kluczowe znaczenie dla rozwiązania ogólnej hipotezy Burnside'a przez Gołoda i Szafarewicza. Motywowane są one również ważnymi hipotezami otwartymi, zwłaszcza z problemem Koethe [2]. Jednocześnie, badane są (zarówno w kontekście macierzy, jak i ogólniejszym) pierścienie, w których suma elementów nilpotentnych jest nilpotentna, patrz [3], [4].

5b **Pierścienie pierwsze i półpierwsze**

Wśród pierścieni przemiennych dużą rolę odgrywają pierścienie zredukowane (bez elementów nilpotentnych), dziedziny całkowitości oraz ciała. Definicje tych pierścieni nie zależą od przemienności, ale ich bezpośrednie przeniesienie nie prowadzi do podobnych własności. Sytuacja jest inna, gdy odpowiednie warunki zamiast na elementach pierścienia sformułowane zostaną na jego ideałach. Prowadzi to do definicji pierścieni półpierwszych, pierwszych oraz prymitywnych (strona ma znaczenie, co prowadzi do ciekawych przykładów). Celem referatu jest opowiedzenie o podstawowych wynikach strukturalnych dotyczących tych klas pierścieni.

5c **Produkt podprosty i twierdzenia o przemienności**

W oparciu o techniki związane z pierścieniami półpierwszymi i prymitywnymi istnieje interesująca technika dowodzenia twierdzeń o przemienności, oparta o pojęcie produktu podprostego. Przykład takiego rezultatu pochodzi od Jacobsona: jeśli R jest takim pierścieniem, że dla każdego $a \in R$ istnieje liczba naturalna $n > 1$ taka, ze $a^n = a$, wówczas R jest pierścieniem przemiennym.

1 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001.

2 A. Smoktunowicz, *Some results in noncommutative ring theory*, ICM 2006.

3 B. Breaz, G. Călugăreanu, *Sums of nilpotent matrices*, Linear and Multilinear Algebra 65 (2016).

4 J. Ster, *Rings in which nilpotents form a subring*, Carpathian Journal of Mathematics, Vol. 32, No. 2 (2016).

5 R. Andruszkiewicz, Wstęp do teorii pierścieni nieprzemiennych, Białystok 2019.

6 K. R. Goodearl, R. B, Warfield; *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, CUP 2004.

6 Odwracalność macierzy nad pierścieniami nieprzemiennymi

Jeśli pierścień R ma tę własność, że dla $r, s \in R$ warunek $rs = 1$ implikuje $sr = 1$, wówczas nazywamy go pierścieniem skończonym w sensie Dedekinda [1]. Jeśli własność tę mają dodatkowo wszystkie pierścienie $M_n(R)$, dla $n \geqslant 1$, wówczas pierścień nazywamy stabilnie skończonym (stably finite) [2]. Wzór na macierz odwrotną nad kwaternionami można wyliczyć podobnie jak na algebrze liniowej [3]. Jeśli zapytamy o odwracalność macierzy transponowanej do odwracalnej, już dla pierścieni z dzieleniem własności tej nie ma, ale są klasy spełniające ten warunek [4] (oraz bibliografia)

1 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001.

2 T. Y Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer 1999.

3 N. Cohen, S. de Leo, *Quaternionic matrices: inversion and determinant*, Electronic Journal of Linear Algebra.

4 R.N. Gupta a, A. Khurana, D. Khurana, T.Y. Lam, *Rings over which the transpose of every invertible matrix is invertible, Journal of Algebra* 322 (2009).

7 Wymiar Goldiego (jednolity) i jego liniowe własności

Wymiarem jednolitym modułu nazywamy największą liczbę całkowitą n taką, że moduł ten zawiera sumę prostą n niezerowych podmodułów (lub ∞). Dzięki pojęciom rozszerzenia istotnego modułów oraz modułu jednolitego możliwe jest zbudowanie teorii wymiaru dla modułów przypominającej do pewnego stopnia teorię przestrzeni liniowych. Narzędzia tej teorii są kluczowe dla istotnych twierdzeń strukturalnych w teorii pierścieni pierwszych i półpierwszych.

1 T. Y Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer 1999.

2 E. Puczyłowski. *Linear Properties Of Goldie Dimension Of Modules And Modular Lattices*, Glasgow Mathematical Journal (2010).

3 P. Domagalska , E. R. Puczyłowski, *Dimension Modules And Modular Lattices*, Journal of Algebra and Its Applications (2012).

8 Klasyczne ułamki w nieprzemiennych pierścieniach

Teoria lokalizacji ma wielkie znaczenie w teorii pierścieni przemiennych. Powiązanym problemem jest m.in. kwestia zanurzania pierścienia R w pierścień z dzieleniem, rozważana przez Malceva. Celem referatu jest przedstawienie klasycznej teorii Orego dotyczącej klasycznych warunków koniecznych i dostatecznych istnienia lokalizacji pierścieni nieprzemiennych. Wyniki te prowadzą m.in. do ważnej definicji pierścieni Goldiego i twierdzenia Goldiego dotyczącego istnienia ułamków dla półpierwszych pierścieni Goldiego.

1 T. Y Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer 1999.

2 K. R. Goodearl, R. B, Warfield; *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, CUP 2004.